Wiskunde 4NS 10-11-'99

Tentamenopgave

I

1. a. Toon aan dat voor $x > 0$: $\left|\frac{1-\cos x}{x}\right| \leq 1$ en $\left|\frac{1-\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{2}$.
Aanwijzing: Schrijf $1 - \cos x = \int_0^x \sin t \, dt$ en gebruik $|\sin t| \leq 1$ en $|\sin t| \leq |t|$.

b. Welke van deze twee functies $\frac{1-\cos x}{x}$ en $\frac{1-\cos x}{x^2}$ is integreerbaar over $(0, +\infty)$? Waarom?

2. Bereken, voor $t > 0$, $f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos x \, dx$.

3. Zij, voor $t > 0$, $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{1-\cos x}{x} dx$. Toon aan dat $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 0$.

4. Bereken de afgeleide $F'(t)$ voor $t > 0$.

5. Toon aan dat F integreerbaar is over $(0, +\infty)$.

Geef kort aan waar en welke stellingen je gebruikt.

II

Voor $f \in L^1(\mathbb{R})$ zij $\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y} f(x) dx$.

1. Geef voor ieder van de volgende functies f de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$: $(a > 0)$
i. $f = \frac{1}{2a} 1_{[-a,a]}$, ii. $f = \frac{1}{2a} 1_{[-a,a]} * \frac{1}{2a} 1_{[-a,a]}$, iii. $f(x) = e^{-ax^2}$, iv. $f(x) = e^{-a|x|}$.

2. Geef de formules van Plancherel en voorwaarden waaronder ze geldig zijn.

3. Bereken de integraal $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

III

Zij $F(x, y, z) = (-y, x, \sqrt{x^2 + y^2})$, $S = \{(x, y, z) : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 < 1\}$ de boven hemi-sfeer, $\Gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ de rand van S, in het xy-vlak antiklok georiënteerd.

1. Bereken de oppervlakte-integraal $\iint_S \mathrm{rot} F.n \, dS$, met n de naar boven gerichte normaal.

2. Bereken de lijnintegraal $\int_\Gamma F.T ds$, waar T de georiënteerde eenheids raakvector aan Γ is.

3. Zij nu $S = \{(x, y, z) : z = 10\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 < 1\}$. Wat kan je, zonder te rekenen, zeggen van de oppervlakte-integraal $\iint_S \mathrm{rot} F.n \, dS$?

IV

Geef aan, bij ieder van de volgende reeksen, voor welke waarde van de getallen $\alpha \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{C}$, de reeks convergent is (resp. absoluut convergent), en geef een reden voor je conclusie (citeer eventueel het relevante kenmerk).
$\sum_{n=1}^{\infty} a^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^\alpha}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sin(\frac{1}{n})$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$.